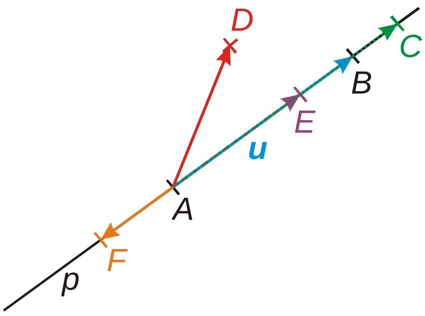
7.4.1 Parametrické vyjádření přímky I

Předpoklady: 7303

Jak jsme vyjadřovali přímky v rovině?

$X = A + t\boldsymbol{u}$



Ke všem bodům z roviny se z bodu A dostaneme posunutím o vektor.

- Pokud je bod na přímce, posouváme se o vektor, který je násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$.
- Pokud bod není na přímce, posouváme se o vektor, který není násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$.

$\Rightarrow$ Bod X leží na přímce p, pokud splňuje rovnici $X = A + t\boldsymbol{u}$, kde $t \in R$. (Do libovolného bodu přímky p se dostaneme z bodu A posunutím o násobek směrového vektoru $\boldsymbol{u}$.)

Na našich úvahách se v prostoru nic nemění $\Rightarrow$ parametrické vyjádření můžeme použít i v prostoru. Jediný rozdíl: Bod má v prostoru tři souřadnice, vektor tři složky $\Rightarrow$ nyní půjde o tři rovnice.

Rovnice $X = A + t\boldsymbol{u}, t \in R$ se nazývá **parametrická rovnice přímky** (nebo také **parametrické vyjádření přímky**) určené bodem A a směrovým vektorem $\boldsymbol{u}$. Proměnná t se nazývá **parametr**.

Př. 1: Jsou dány body $A[1;1;3]$ a $B[2;1;1]$.
a) Najdi parametrické vyjádření přímky AB.
b) Rozhodni, zda na přímce leží body $C[4;5;0]$ a $D[-1;1;7]$.
c) Urči zbývající souřadnice bodů $E[4;?;?]$, $F[?;2;?]$ tak, aby ležely na přímce AB.
d) Najdi parametrické vyjádření přímky, která je rovnoběžná s přímkou AB a prochází bodem $H[0;3;5]$.

a) $\boldsymbol{u} = B - A = (1;0;-2)$

Přímka AB: $X = [1;1;3] + t(1;0;-2), t \in R$ nebo

$$x = 1 + t$$
$$y = 1$$
$$z = 3 - 2t, t \in R.$$

b)

Bod $C[4;5;0]$ leží na přímce AB, když platí:

$4 = 1 + t$

$5 = 1$

$0 = 3 - 2t$.

Není třeba ani počítat, druhá rovnice určitě nevyjde $\Rightarrow$ bod C neleží na přímce AB.

Bod $D[-1;1;7]$ leží na přímce AB, když platí:

$-1 = 1 + t \Rightarrow t = -2$

$1 = 1$

$7 = 3 - 2t \Rightarrow t = -2$.

Rovnice vyšly $\Rightarrow$ bod D leží na přímce AB.

c)

Bod $E[4;?;?]$ leží na přímce *AB*, když platí:

$4=1+t$

$?=1$

$?=3-2t$.

První rovnice: $4=1+t \Rightarrow t=3$

Druhá rovnice se počítat nemusí.

Třetí rovnice: Musíme dosadit $t=3$ (vypočteno z první rovnice): $?=3-2\cdot 3=-3$.

Bod *E* má souřadnice $E[4;1;-3]$.

Bod $F[?;2;?]$ leží na přímce *AB*, když platí:

$?=1+t$

$2=1$

$?=3-2t$.

Druhá rovnice nemůže být nikdy splněna $\Rightarrow$ není možné dopočítat souřadnice bodu *F* tak, aby ležel na přímce *AB*.

d) rovnoběžka s *AB* $\Rightarrow$ stejný směrový vektor (nebo jeho násobek)

$\boldsymbol{u}=B-A=(1;0;-2)$ $\qquad H[0;3;5]$

Hledaná rovnoběžka: $X=[0;3;5]+t(1;0;-2), t\in R$ nebo
$$\begin{aligned} x&=0+t\\ y&=3\\ z&=5-2t, t\in R. \end{aligned}$$

Pedagogická poznámka: Největším problémem v předchozím příkladu není vlastní analytická geometrie, ale významy rovností jako $2=1$ nebo $1=1$ pro řešení příkladu.

Dodatek: Obě přímky můžeme napsat také jako množiny bodů: $AB=\{[1+t;1;3-2t], t\in R\}$, rovnoběžka procházející bodem H $\{[t;3;5-2t], t\in R\}$.

Př. 2: Jsou dány body $A[1;-2;2]$, $B[3;2;0]$. Napiš parametrické vyjádření:

a) přímky *AB* b) úsečky *AB* c) polopřímek *AB* a *BA*.

Na které části přímky leží bod $C[0;-4;3]$?

$\boldsymbol{u}=B-A=(2;4;-2)$ $\Rightarrow$ pro body na přímce *AB* platí: $X=\{[1;-2;2]+t(2;4;-2), t\in R\}$.

a) Přímka $AB=\{[1+2t;-2+4t;2-2t], t\in R\}$ nebo
$$\begin{aligned} x&=1+2t\\ y&=-2+4t\\ z&=2-2t, t\in R \end{aligned}.$$

V dalších bodech měníme pouze množinu, ze které volíme parametr.

b) Úsečka $AB=\{[1+2t;-2+4t;2-2t], t\in\langle 0;1\rangle\}$.

c) Polopřímka $AB=\{[1+2t;-2+4t;2-2t], t\in\langle 0;\infty)\}$.

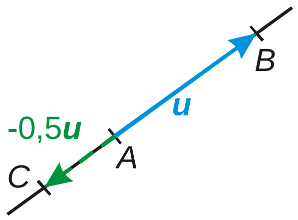
Polopřímka $BA=\{[1+2t;-2+4t;2-2t], t\in(-\infty;1\rangle\}$.

Bod $C[0;-4;3]$ leží na přímce *AB*, když platí:

$0=1+2t \Rightarrow t=-0,5$

$-4=-2+4t \Rightarrow t=-0,5 \Rightarrow$ bod *C* leží na přímce *AB* na polopřímce opačné k polopřímce *AB*.

$3=2-2t \Rightarrow t=-0,5$



Pedagogická poznámka: Předchozí příklad používám částečně jako synchronizační, aby si všichni zkusili samostatně alespoň dva z bodů následujícího příkladu.

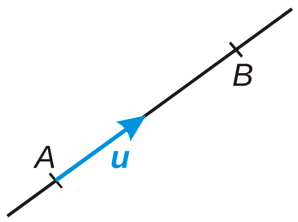
Př. 3: Rozhodni, zda je možné zapsat výsledky předchozího příkladu také takto:
a) přímka $AB = \{[1+t;-2+2t;2-t], t \in R\}$,
b) úsečka $AB = \{[1+t;-2+2t;2-t], t \in \langle 0;2 \rangle\}$,
c) polopřímka $AB = \{[3+2t;2+4t;-2t], t \in \langle -1;\infty)\}$,
d) polopřímka $BA = \{[1-t;-2-2t;2+t], t \in \langle -2;\infty)\}$.

a) přímka $AB = \{[1+t;-2+2t;2-t], t \in R\}$

body na přímce *AB* jsou zapsány jako $X = [1;-2;2] + t(1;2;-1) = A + t \cdot 0{,}5(B-A)$ $\Rightarrow$ jde o parametrické vyjádření přímky *AB*

b) úsečka $AB = \{[1+t;-2+2t;2-t], t \in \langle 0;2 \rangle\}$

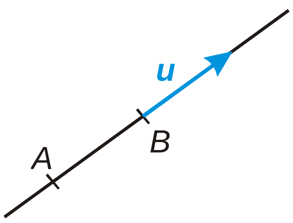
body na úsečce *AB* jsou zapsány jako $X = [1;-2;2] + t(1;2;-1) = A + t \cdot \boldsymbol{u}$, kde $\boldsymbol{u} = 0{,}5(B-A)$



$\Rightarrow$ jde o parametrické vyjádření úsečky *AB*, protože platí $B = A + 2 \cdot \boldsymbol{u}$

c) polopřímka $AB = \{[3+2t;2+4t;-2t], t \in \langle -1;\infty)\}$

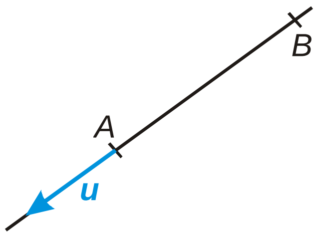
body na polopřímce *AB* jsou zapsány jako $X = [3;2;0] + t(2;4;-2) = B + t \cdot \boldsymbol{u}$, kde $\boldsymbol{u} = (B-A)$



$\Rightarrow$ jde o parametrické vyjádření polopřímky *AB*, protože platí $A = B + (-1)\boldsymbol{u}$

d) polopřímka $BA = \{[1-t;-2-2t;2+t], t \in \langle -2;\infty)\}$

body na polopřímce BA jsou zapsány jako $X=[1;-2;2]+t(-1;-2;1)=A+t\cdot\boldsymbol{u}$, kde



$\boldsymbol{u}=0,5(A-B)$ $\Rightarrow$ jde o parametrické vyjádření polopřímky BA, protože platí $B=A+(-2)\boldsymbol{u}$

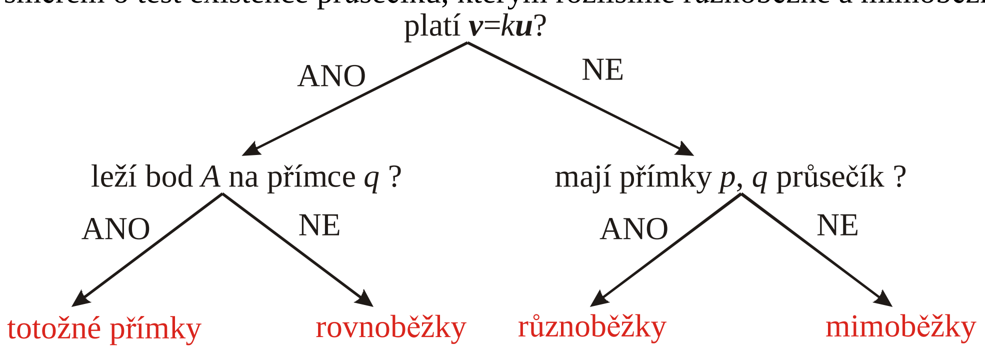
Pedagogická poznámka: U velké většiny studentů je třeba, aby si nakreslili obrázek a teprve poté se rozhodovali, zda je zápis správný.

Př. 4: Jaké jsou možnosti vzájemné polohy dvou přímek $p(A,\boldsymbol{u})$ a $q(B,\boldsymbol{v})$ v prostoru? Jaké změny je nutné provést v diagramu pro určování vzájemné polohy přímek v rovině, aby jej bylo možné použít pro přímky v prostoru?

Možnosti vzájemné polohy dvou přímek v prostoru:

- totožné přímky (všechny body společné),
- rovnoběžné přímky (stejný směr, žádné společné body),
- různoběžné přímky (různé směry, jeden společný bod),
- mimoběžné přímky (různé směry, žádný společný bod),

$\Rightarrow$ diagram pro určování vzájemné polohy přímek musíme doplnit pro přímky s různým směrem o test existence průsečíku, kterým rozlišíme různoběžné a mimoběžné přímky.



Př. 5: Jsou dány přímky $p(A,\boldsymbol{u})$ a $q(B,\boldsymbol{v})$; $A[-3;-1;1]$, $B[2;-2;-1]$, $\boldsymbol{u}=(2;1;0)$, $\boldsymbol{v}=(1;-3;-2)$. Urči jejich vzájemnou polohu. Pokud jsou přímky různoběžné, najdi jejich průsečík.

Směrové vektory: $\boldsymbol{u}=(2;1;0)$, $\boldsymbol{v}=(1;-3;-2)$ $\Rightarrow$ neplatí $\boldsymbol{v}=k\boldsymbol{u}$ $\Rightarrow$ přímky jsou různoběžné nebo mimoběžné (změna oproti rovině) $\Rightarrow$ zkusíme najít průsečík.

$$p:\ \begin{aligned} x&=-3+2t\\ y&=-1+t\\ z&=1, t\in R\end{aligned} \qquad q:\ \begin{aligned} x&=2+s\\ y&=-2-3s\\ z&=-1-2s, s\in R\end{aligned}$$

Průsečík musí vyhovovat všem rovnicím $\Rightarrow$ soustava tří rovnic o dvou neznámých

$$-3+2t=2+s$$
$$-1+t=-2-3s$$
$$1=-1-2s.$$

Upravíme rovnice: $\begin{aligned} 2t-s&=5 \\ t+3s&=-1 \\ 2s&=-2 \end{aligned}$

Máme štěstí, z poslední rovnice jde ihned spočítat neznámou s: $s=-1$.
Dosadíme do zbývajících dvou rovnic:

$2t-(-1)=5 \Rightarrow 2t=4 \Rightarrow t=2$
$t+3(-1)=-1 \Rightarrow t=2$
průsečík existuje $\Rightarrow$ přímky jsou různoběžné.

Určíme souřadnice průsečíku z rovnice přímky q: $\begin{aligned} x&=2+s=2-1=1 \\ y&=-2-3s=-2-3(-1)=1 \\ z&=-1-2s=-1-2(-1)=1 \end{aligned}$.

Přímky p a q jsou různoběžné, protínají se v bodě $P[1;1;1]$.

Pedagogická poznámka: Značná část studentů špatně řeší soustavu rovnic pro hledání průsečíku. Ze třetí rovnice vyjádří s, ale dosadí ho pouze do jedné ze zbývajících rovnic, ze které vypočítá t. Nekontroluje pak již zda vyjde se spočtenými hodnotami i zbývající rovnice. Snažím se je na to upozornit již v tomto příkladě, i když toto opomenutí nevede ke špatnému výsledku jako v prvním příkladu příští hodiny.

Př. 6: Petáková:
strana 114/cvičení 4
strana 114/cvičení 6 a) b) c) d)
strana 114/cvičení 8

Shrnutí: Parametricky vyjadřujeme přímku stejným způsobem v rovině i v prostoru.